OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 825.24.58 - Tél. : 824.95.92 – 824.65.81

Durée : 4 heures

Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées . Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE1 (06 points)

A) **Questions de cours**

1) Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z non nul. **(0,75 point)**
2) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre $K(z_0)$, d' angle θ. **(0,5 point)**

B) On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1) Donner une écriture trigonométrique de z_0. **(0,5 point)**
2) Montrer que : $z_0^4 = -8 + 8\ i\sqrt{3}$. **(0,25 point)**
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$. **(0,5 point)**
4) En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8\,i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique. **(01 point)**

   On peut remarquer que (E) équivaut à : $\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$
5) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$. **(0,75 point)**
6) Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. **(0,5 point)**
7) Vérifier que : r (A) = C ; r (C) = B et r (B) = D. **(0,75 point)**
8) En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **(0,5 point)**

EXERCICE 2 (04 points)

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher dont un rouge numéroté 1, trois rouges numérotés 2; deux verts numérotés 1, un vert numéroté 2 et un jaune numéroté 2.

A) **Question de cours**

Rappeler la définition de deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. **(01 point)**

B) Un enfant choisit au hasard et successivement sans remise deux cubes de la boîte.
On admettra que la probabilité de choisir un cube est indépendante de son numéro et de sa couleur.

1)On note : A, l'événement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes » ;
B, l'événement : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ».

a) Calculer la probabilité de A. **(0,25 point)**
b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{9}{14}$. **(0,25 point)**
c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? **(0,25 point)**

2)Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cubes rouges tirés par l'enfant.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. **(0,75 point)**
b) Calculer l'espérance mathématique de X. **(0,25 point)**
c) Calculer la variance de X. **(0,25 point)**

C) L'enfant tire cette fois simultanément trois cubes de la boîte.

1) Déterminer la probabilité de l'événement C : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ». **(0,25 point)**

2) L'enfant répète n fois l'expérience, en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant.
   On note p_n, la probabilité de l'évènement D_n « C soit réalisé au moins une fois »
   Exprimer p_n en fonction de n. **(0,25 point)**
3) Etudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n\in IN}$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. **(0,5 point)**

PROBLEME **(10 points)**

NB : Les parties A et B ne sont pas indépendantes.

PARTIE A : **(03,25 points)**

Soit g la fonction définie dans]0, +∞[par :

$g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. **(0,5 point)**
   b) Calculer les limites de g aux bornes de D_g. **(0,75 point)**
   (Pour la limite au voisinage de 1, on pourra poser h = x – 1).
2) Déterminer g', la fonction dérivée de g, et dresser le tableau de variations de g. **(01 point)**
3) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α telle que $4 < \alpha < 5$. **(0,5 point)**
4) Déduire de l'étude précédente le signe de g sur D_g. **(0,5 point)**

PARTIE B : **(06,75 points)**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x}$, si $x > 0$

$f(x) = \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}$, si $x \leq 0$

1) a) Vérifier que f est définie sur IR \ {1} et calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(01 point)**
   b) Préciser les droites asymptotes à ($\mathscr{C}_f$), la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. **(0,5 point)**
2) a) Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 point)**
   b) On admet que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = \frac{-1}{2}$.
   Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{6}$. **(0,5 point)**
   Donner l'interprétation graphique de ces résultats. **(0,5 point)**
3) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$. **(0,25 point)**
   b) Calculer f '(x) sur les intervalles où f est dérivable puis dresser le tableau de variations de f. **(01 point)**
4) Construire ($\mathscr{C}_f$) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm. **(01,5 point)**
   On pourra prendre $\alpha \simeq 4,5$.
   On placera les points d'abscisses – 1 ; 0 ; 2 et 5.
5) a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout x ∈ IR \ {-2 ; -1}, on ait :
   $\frac{-6x}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$ **(0,25 point)**
   b) En déduire que :
   $\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$ **(0,25 point)**
   c) Calculer l'aire du domaine du plan limité par ($\mathscr{C}_f$), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = - ln 2 et x = 0. **(0,5 point)**